第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1 ［1］ 次が成り立つことを証明せよ。

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n) $$

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad (1 \leqq r \leqq n-1,\ n \geqq 2) $$

［2］ 8 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1) 4 人，3 人，1 人の 3 組に分ける

(2) 4 組に分ける

Point Pickup

［1］ 異なる n 個から異なる r 個を取り出す組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に対し, ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ や ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$, ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が表す組合せを考える。

［2］ 分けるものが区別できる組分けにおいて，振り分ける個数が同じで分ける組に名前がない等，区別できない組が n 組ある場合は，まず組を区別して組分けを行い，その後，その結果を $n!$ で割る。

各組に振り分ける個数が不明な場合は，振り分ける個数を決め，組分けを行う方法がある。

第 3 講　PART1　確認問題

1　次の等式を証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

（証明）

${}_n\mathrm{C}_r$ は, [ア] の総数である。

[ア] の総数は, [イ] の総数と等しい。

[ウ] は, [イ] の総数であるから, ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ。

[[ア] の選択肢]

① 異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せ

② 異なる r 個のものから異なる n 個を選ぶ組合せ

[[イ] の選択肢]

① 異なる n 個のものからある特定の 1 個を選ぶ組合せ

② 異なる r 個のものからある特定の 1 個を選ぶ組合せ

③ 異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せ

④ 異なる r 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せ

[[ウ] の選択肢]

① ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$　② ${}_n\mathrm{C}_1$　③ ${}_{n-1}\mathrm{C}_{n-r}$　④ ${}_{n-1}\mathrm{C}_1$

⑤ ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$　⑥ ${}_r\mathrm{C}_{n-r}$　⑦ ${}_r\mathrm{C}_1$

2 次の等式を証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r\quad(1\leqq r\leqq n-1,\ n\geqq 2)$$

（証明）

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の２つの場合に分けられる。

(i) [エ] を選ぶ場合　　(ii) [エ] を選ばない場合

(i)は [オ] を選ぶ場合であり，(ii)は [カ] を選ぶ場合である。

(i)，(ii)は同時に起こらないから，和の法則により，

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つ。

[[エ] の選択肢]

①　$n-r$ 個　　②　$n-1$ 個　　③　ある特定の１個

[[オ]，[カ] の選択肢]

①　n 個から $n-r$ 個

②　n 個から１個

③　残り $n-1$ 個から $r-1$ 個

④　残り $n-1$ 個から１個

⑤　残り r 個から $r-1$ 個

⑥　残り r 個から１個

⑦　ある特定の１個を除く $n-1$ 個から r 個

⑧　ある特定の１個を除く $n-1$ 個から１個

7 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

3　4 人，2 人，1 人の 3 組に分ける方法

キクケ 通り

4　4 組に分ける方法

コサシ 通り

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1　[1]　次が成り立つことを証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad (1 \leqq r \leqq n-1,\ n \geqq 2)$$

[2]　8 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　4 人，3 人，1 人の 3 組に分ける

(2)　4 組に分ける

[1]　異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，n 個のものから残す $(n-r)$ 個を決めることと同じである。したがって

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

が成り立つ。

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の 2 つの場合に分けられる。

(i)　ある特定の 1 個を選ぶ場合　　(ii)　ある特定の 1 個を選ばない場合

(i)は，残り $(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個選ぶ場合で　${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(ii)は，特定の 1 個を除く $(n-1)$ 個から r 個選ぶ場合で　${}_{n-1}\mathrm{C}_r$

(i)，(ii)は同時に起こらないので，和の法則により

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

が成り立つ。

[2]　(1)　8 人から 4 人を選び，残った 4 人から 3 人選ぶと，残りの 1 人は自動的に決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_8\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 70 \times 4 = 280 \text{（通り）}$$

(2)　4 組に入る人数をそれぞれ a 人，b 人，c 人，d 人$(a \leqq b \leqq c \leqq d)$とし，$(a,\ b,\ c,\ d)$ のように表すと

$$(1,\ 1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

の場合がある。

(1，1，1，5) のとき　$\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_1}{3!}=56$（通り）

(1，1，2，4) のとき　$\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_2}{2!}=420$（通り）

(1，1，3，3) のとき　$\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_1\times{}_6C_3}{2!2!}=280$（通り）

(1，2，2，3) のとき　$\dfrac{{}_8C_1\times{}_7C_2\times{}_5C_2}{2!}=840$（通り）

(2，2，2，2) のとき　$\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2}{4!}=105$（通り）

以上より，分け方の総数は $56+420+280+840+105=1701$（通り）

第３講　PART1　確認問題 解答

1

[正解]ア：①，イ：③，ウ：①

[解説]

${}_n\mathrm{C}_r$ は，**異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せの総数である。**

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶ組合せの総数は，**異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せの総数と等しい。** [A]

${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ は，異なる n 個のものから残す $n-r$ 個を選ぶ組合せの総数を表すから，${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つ。

> [A]　残す $n-r$ 個を選べば，自動的に r 個を選ぶことになる（残さない方として r 個を選ぶことにほかならない）。

2

[正解]エ：③，オ：③，カ：⑦

[解説]

異なる n 個のものから異なる r 個を選ぶことは，次の２つの場合に分けられる。

(i)　**ある特定の１個を選ぶ場合**

(ii)　ある特定の１個を選ばない場合 [B]

(i)は，**残り $n-1$ 個から $r-1$ 個を選ぶ場合である**から

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(ii)は，**ある特定の１個を除く $n-1$ 個から r 個を選ぶ場合である**から

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r$$

(i)，(ii)は同時に起こらないから，和の法則により，

${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つ。

> [B]　例えば，1，2，……，n の番号のついたカードから，r 枚を選ぶとき，次の２つの場合に分ける。
> (i)　１のカードを含む
> (ii)　１のカードを含まない
> (i)は，１のカード以外の $r-1$ 枚を，残りの $n-1$ 枚から選ぶ場合の数であるから
> $${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
> (ii)は，１のカードを含まない r 枚を，残りの $n-1$ 枚から選ぶ場合の数であるから
> $${}_{n-1}\mathrm{C}_r$$
> (i)，(ii)から和の法則により
> $${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$$
> n枚からr枚選ぶ
> (i)　1，2，……，n
> 1：選ばれている　2，……，n：残り$n-1$枚から$r-1$枚選ぶ
> (ii)　1，2，……，n
> 1：選ばない　2，……，n：残り$n-1$枚からr枚選ぶ

3 [正解] キクケ：105

[解説]

7 人から 4 人を選び，残った 3 人から 2 人選ぶと，残りの 1 人は自動的に決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 = 35 \times 3 = \mathbf{105}\ (通り)$$ [C]

[C]　各組の人数が異なるから，組は区別できる。

4 [正解] コサシ：350

[解説]

4 組に入る人数を a 人，b 人，c 人，d 人 $(a \leqq b \leqq c \leqq d)$ とし，$(a,\ b,\ c,\ d)$ のように表すと

$(1,\ 1,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 3)$，

$(1,\ 2,\ 2,\ 2)$

の場合がある。

(i)　$(1,\ 1,\ 1,\ 4)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35\ (通り)$$

[D]

(ii)　$(1,\ 1,\ 2,\ 3)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_2}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 10}{2} = 210\ (通り)$$

[D]

(iii)　$(1,\ 2,\ 2,\ 2)$ のとき

$$\frac{{}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = \frac{7 \times 15 \times 6}{6} = 105\ (通り)$$

[D]

[D]　同じ人数の組は区別ができない。区別できない組が n 組ある場合，まず区別して組分けを行い，$n!$で割る。

(i)〜(iii)より，分け方の総数は

$$35 + 210 + 105 = \mathbf{350}\ (通り)$$